1.5.3 Mechanická práce III

Předpoklady: 1502

Pedagogická poznámka: Tato hodina není nutná k probírání další látky, je proto možné ji přeskočit a příklad s pružinou krátce ukázat na konci předchozí hodiny.

Př. 1: Prodloužení nebo stlačení pružiny je přímo úměrné síle, která na ni působí. Tato přímá úměrnost se uvádí v obráceném pořadí $F = k \cdot x$, kde F je působící síla, x je prodloužení nebo zkrácení pružiny a k je konstanta úměrnosti nazývaná tuhost pružiny.
a) V jakých jednotkách se tato konstanta udává?
b) Urči tuto konstantu pro pružinu odpružení osobního automobilu jehož výška nad vozovkou se po naložení 150 kg sníží o 2 cm. Počítej, že tato hmotnost se rozloží rovnoměrně na všechna čtyři kola.
c) Jaká práce se při naložení nákladu na pružinu vykoná?

$m = 150\,\text{kg}$ $\quad x = 2\,\text{cm} = 0,02\,\text{m}$ $\quad k = ?$ $\quad W = ?$

a) určení jednotek tuhosti pružiny

Jednotky, ve kterých se udává konstanta *k*, určíme dosazením do definičního vztahu.

$$F = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{1\text{N}}{1\text{m}} = 1\,\text{N/m}$$

b) určení tuhosti pružiny:

Při naložení nákladu do vozu bude každá pružina stlačována jednou čtvrtinou tíhy nákladu. Tato síla způsobí stlačení pružiny a umožní nám určit tuhost.

$F = k \cdot x \Rightarrow k = \frac{F}{x}$, dosadíme: $F = \frac{1}{4} F_g = \frac{1}{4} mg$

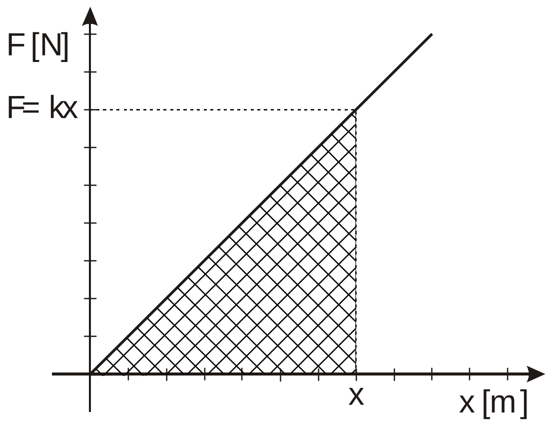
$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{4x} = \frac{150 \cdot 10}{4 \cdot 0,02}\ \text{N/m} = 1,9 \cdot 10^4\ \text{N/m}$$

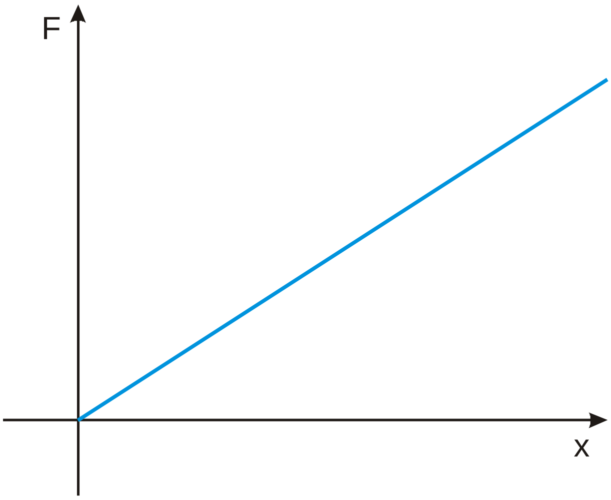
c) určení vykonané práce:

Vzorec pro práci: $W = F \cdot s$

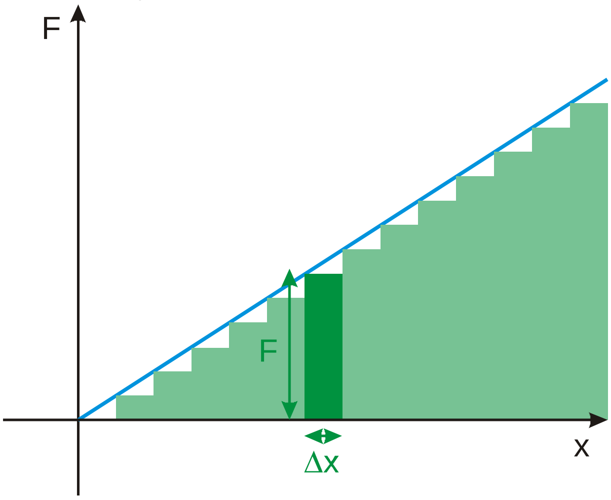
Problém: síla, kterou je pružina stlačována, se mění s jejím stlačením. Velikost síly je dána vztahem $F = k \cdot x$, síla přímo úměrně roste se stlačením $\Rightarrow$ nemůžeme tedy použít klasický vztah pro práci.

Nakreslíme graf závislosti síly (působící na pružinu) na stlačení pružiny.

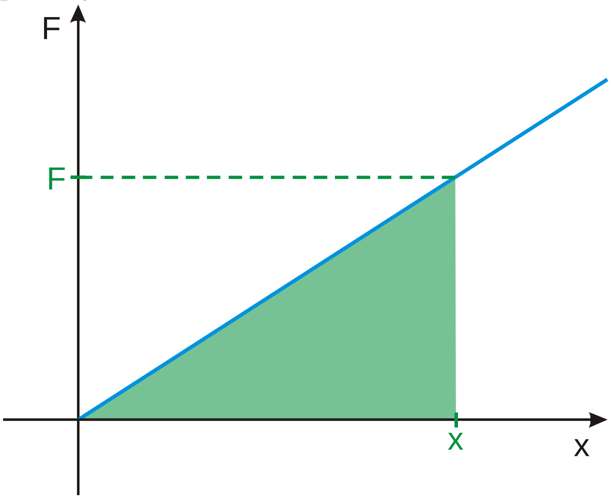




Podobná situace jako při výpočtu dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu $\Rightarrow$ přibližně práci určíme, když budeme předpokládat, že síla je po určitou dobu stálá.



Přesnost výpočtu roste, když zmenšuje Δx, po které předpokládáme konstantní hodnotu síly.
$\Rightarrow$ Práci určíme jako plochu pod grafem závislosti působící síly na dráze (tzn. na stlačení pružiny).



V grafu je nakreslena plocha pod grafem znázorňující vykonanou práci při stlačení od nuly do x - pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $F = kx$ (největší působící síla) a x (největší stlačení).

$W = S_{\triangle} = \frac{ab}{2} = \frac{F \cdot x}{2} = \frac{kx \cdot x}{2} = \frac{1}{2}kx^2$

Dosadíme za k: $k = \frac{mg}{4x}$.

$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{4x}x^2 = \frac{1}{8}mgx$ - práce, kterou vykoná jedna pružina, v autě jsou čtyři $\Rightarrow$

násobíme čtyřmi: $W_C = 4\frac{1}{8}mgx = \frac{1}{2}mgx$

$W_C = \frac{1}{2}mgx = \frac{1}{2}150 \cdot 10 \cdot 0{,}02\,\mathrm{J} = 15\,\mathrm{J}$

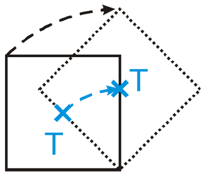
Tuhost pružiny se udává v $\mathrm{N/m}$, tuhost pružiny v autě je $1{,}9 \cdot 10^4\,\mathrm{N/m}$ a při naložení nákladu byla na pružinách vykonána práce 15 J.

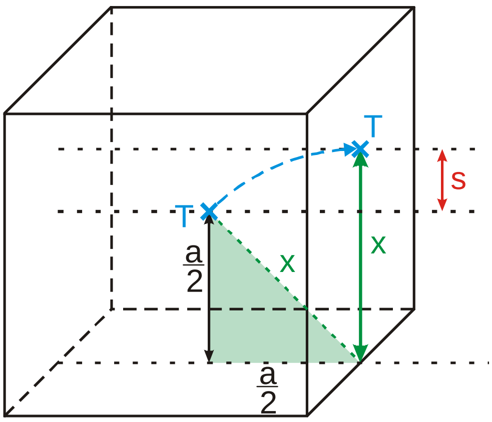
Pedagogická poznámka: Bod c) předchozího příkladu samozřejmě řešíme po krocích se společnou kontrolou na tabuli.

Dodatek: Představa postupného zatěžování pružiny rostoucí silou, odpovídá postupnému přidávání nákladu. Hmotnost nákladu postupně roste, pružina se postupně stlačuje, na každé další malé stlačení je potřebná větší síla.
Naopak je poměrně nepřirozená v případě, že bychom náklad naložili najednou – zdálo by se, že na pružinu celou dobu působila tíha nákladu a síla by tak byla konstantní. Vykonaná práce však má odpovídat celkové změně, která je v tomto případě stejná jako při postupném nakládání. Ve skutečnosti je to tak, že při okamžitém naložení celého nákladu, na počátku jen část tíhy stlačuje pružinu, zbytek uděluje nákladu zrychlení směrem k zemi.

Př. 2: Jak velkou práci vykonáme, překlopíme-li bednu tvaru krychle o hraně ***a*** a hmotnosti ***m***, okolo hrany. Bedna je zajištěna tak, aby se během překlápění neposouvala.

Při překlápění krychle budeme vykonávat práci tím, že budeme zvedat těžiště krychle. Vzdálenost, o kterou těžiště zdvihneme je vidět z obrázku – na počátku se těžiště nachází nad středem strany, na konci nad hranou.





$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$

$s = x - \frac{a}{2} \Rightarrow s = a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}$

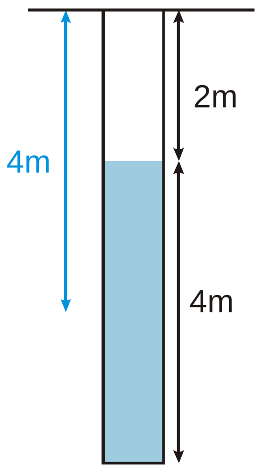
$W = Fs \Rightarrow W = mg\left(a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}\right)$[J]

Na převrácení krychle bude třeba práce $W = mg\left(a\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2}\right)$[J].

Př. 3: Urči práci, kterou vykoná čerpadlo při vyčerpání studny o průměru 80 cm a hloubce 6 m, pokud jsou v ní 4 m vody. Hustota vody je $10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

$d = 80\,\mathrm{cm} = 0{,}8\,\mathrm{m} \Rightarrow r = 0{,}4\,\mathrm{m}$ $h_0 = 6\,\mathrm{m}$ $v = 4\,\mathrm{m}$ $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ $W = ?$

Na první pohled podobný příklad jako předchozí příklady – práce je určena zvedáním kolmo vzhůru.



Problém: Během čerpání vody klesá její hladina ve studni $\Rightarrow$ čerpadlo zvedá vodu do rostoucí výšky a musí při přečerpání stejného objemu vykonat větší práci.
Úvaha: vyčerpání 1 l vody do výšky 2 m a 1 litru vody do výšky 6 m vyžaduje stejnou práci jako vyčerpání 2 l vody do výšky 4 m $\Rightarrow$ celkovou vykonanou práci určíme, když vypočteme práci nutnou k vyčerpání obsahu studny do výšky 4 m (4 m jsou také průměrnou vzdáleností, do které musíme vodu čerpat).
$W = Fs = Fh$ $h = 4\,\mathrm{m}$

$F = F_g = mg = V\rho g = \pi r^2 v\rho g$.

$W = Fh = \pi r^2 v \rho g \cdot h = \pi \cdot 0{,}4^2 \cdot 4 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 4\,\mathrm{J} = 80000\,\mathrm{J}$

Čerpadlo vykoná práci 80000 J.

Př. 4: Urči práci, kterou vykoná gravitační síla během prvních tří sekund pádu parašutisty o hmotnosti 90 kg (s výstrojí).

$m = 90\,\mathrm{kg}$, $t = 3\,\mathrm{s}$, $W = ?$

Směr posunutí (svisle dolů) i působení síly (svisle dolů) je stejný $\Rightarrow$ $W = Fs$.

$F = F_g = mg$

$s = \frac{1}{2}gt^2$ (parašutista padá rovnoměrně zrychleně)

$W = Fs = mg\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2 = \frac{1}{2}90 \cdot 10^2 \cdot 3^2\,\mathrm{J} = 40500\,\mathrm{J}$

Gravitační síla vykoná během první tří sekund volného pádu práci 40500 J.

Shrnutí: Vzorec $W = Fs\cdot\cos\alpha$ můžeme použít pouze v případě, že se velikost síly F ani úhlu α během posunování nemění.